总体分布，样本分布，抽样分布

Polulation, sample, and sampling distributions

Qingyao Zhang

2026-05-23

目录

1 总体

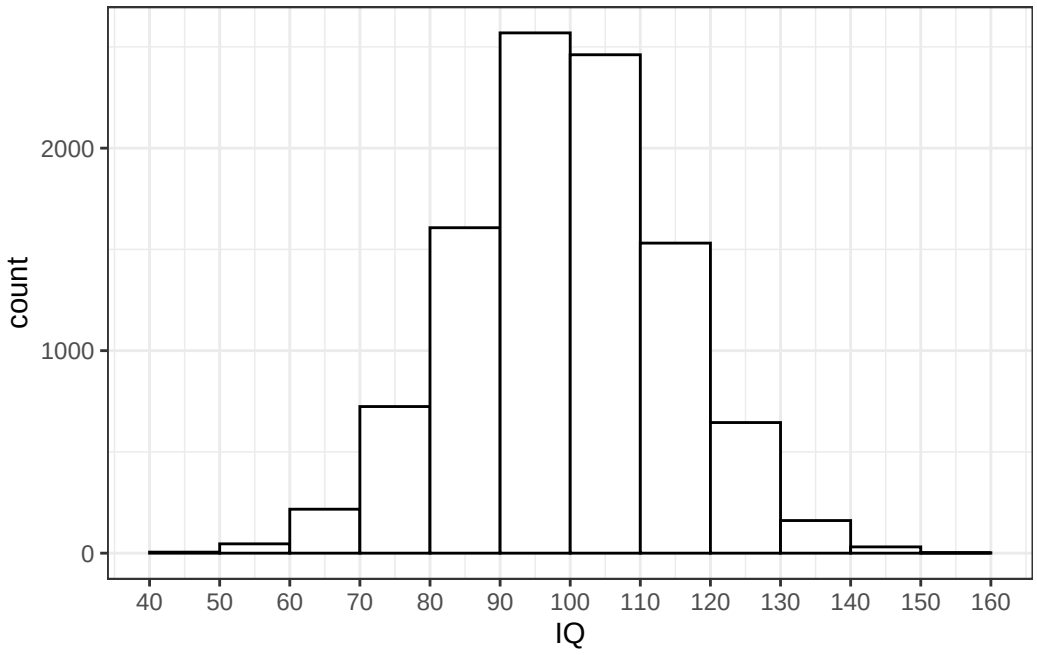
我们捏造一个人数为 10000 人的总体，为 10000 名被试设定编号 ID，并捏造出其 IQ 数据，设定 IQ 的均值为 100，标准差为 15。

```r
# Population, 总体
# 总体均值设置为 100
mu <- 100
# 总体标准差设置为 15
sigma <- 15
# 随机种子值设置为 2026
set.seed(202605)
# 将 ID 与 IQ 存入数据表中
population10000 <- data.frame(
  # 生成 10000 个 ID (被试编号)
  ID = seq(1:10000),
  # 生成 10000 个均值为 mu、标注差为 delta 的 IQ 分数
  IQ = round(rnorm(10000, mean = mu, sd = sigma), 0)
  )
# 查看数据表
# View(population10000)
# 查看数据表前 6 行
range(population10000$IQ)
## [1]  38 156
head(population10000)
##   ID  IQ
## 1  1 126
## 2  2  94
## 3  3  93
## 4  4 119
## 5  5 104
## 6  6  81
# 总体的实际均值
mean(population10000$IQ)
## [1] 99.8009
# 总体的实际标准差
sqrt(sum((population10000$IQ - mean(population10000$IQ))^2)/10000)
## [1] 14.94354
```

2 总体分布

总体分布 (population distribution) 是总体 (10000 名被试 IQ 得分) 的分布。注意该分布的横纵坐标的全距。

```r
# 作总体的直方图
# 总体分布是 10000 个数据点的分布。
library(ggplot2)
ggplot(population10000, aes(x = IQ)) +
  geom_histogram(breaks = seq(40, 160, 10),
                 fill = "white",
                 color = "black") +
  scale_x_continuous(breaks = seq(40, 160, 10)) +
  coord_cartesian(xlim = c(40, 160)) +
  theme_bw()
```



3 取样过程

接下来，我们模拟取样的过程。我们从 $N = 10000$ 的总体中随机抽取一个样本量 $n = 100$ 的样本。我们称这个样本为 sample1。

```r
# 从总体中随机抽取一个样本量为 100 的样本，抽取其 ID
sample1ID <- sample(population10000$ID, 100)
# 根据 ID 选出 sample1 的数据
sample1 <- population10000[sample1ID, ]
```

4 样本 1

查看 sample1 中的数据。注意：被试 ID 的顺序是乱的，这是由随机取样导致的。

```
# 查看样本
head(sample1)
##        ID  IQ
## 1553 1553 116
## 7307 7307  98
## 5822 5822  90
## 6361 6361 104
## 2752 2752 124
## 242   242  99
```

5 基于样本 1 估计总体均值与标准差

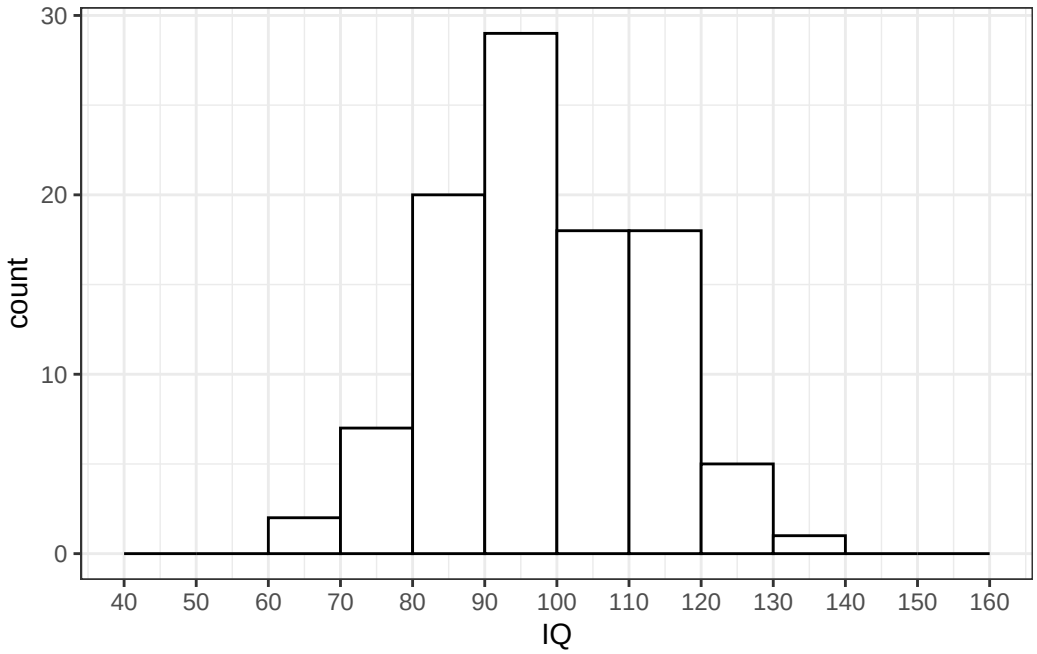
样本的均值是总体均值的无偏估计。样本的标准差总是小于总体的标准差，因此使用样本的无偏标准差作为总体标准差的无偏估计。尽管名为“无偏”，实际上还是有偏差的。

```
# 取值范围
range(sample1$IQ)
## [1]  67 139
# 计算 sample1 的 IQ 的均值
sample1_mean <- mean(sample1$IQ)
sample1_mean
## [1] 98.93
# 计算 sample1 的 IQ 的标准差
sample1_sd <- sqrt(sum((sample1$IQ - sample1_mean)^2)/100)
sample1_sd
## [1] 14.04511
# sample1 的无偏标准差（基于 sample1 估计总体的标准差）
sample1_sd_unbiased <- sqrt(sum((sample1$IQ - sample1_mean)^2)/(100 - 1))
sample1_sd_unbiased
## [1] 14.11587
# 使用`sd()`函数计算 sample1 的无偏标准差（总体标准差的估计值）
sd(sample1$IQ)
## [1] 14.11587
```

6 样本分布：样本 1 的分布

样本分布（sample distribution）是样本中 100 个被试 IQ 得分的分布。

```
ggplot(sample1, aes(IQ)) +
  geom_histogram(breaks = seq(40, 160, 10),
                 fill = "white",
                 color = "black") +
  scale_x_continuous(breaks = seq(40, 160, 10)) +
  coord_cartesian(xlim = c(40, 160)) +
  theme_bw()
```



7 样本分布与总体分布的关系

若总体的均值 mu 与标准差 sigma 是未知的，我们可以用样本的均值与无偏标准差来估计总计的均值与标准差：

$$mu = M_{sample} \tag{1}$$

$$sigma = s \tag{2}$$

在上式中，M_{sample} 是样本的均值，s 是样本的无偏标准差。

8 重复取样

使用一个样本计算得到的均值估计总体的均值产生的偏差可能较大，如果我们重复取样的过程，抽取多个样本，将多个样本的均值求均值，那么，我们将得到更为准确的估计值。下面，我们从人数 $N = 10000$ 的总体中取出 $m = 1000$ 个样本量 $n = 100$ 的样本。

```
# 从总数为 10000 的样本中累计抽取 1000 个样本量为 100 的样本，存入 samples
samples <- list()
for (index in 1:1000) samples[[index]] <- population10000[sample.int(10000, 100), ]
# 查看 samples
length(samples)
## [1] 1000
head(samples[[1]])
##        ID  IQ
## 989   989 107
## 194   194 115
## 3489 3489 104
## 4818 4818 144
## 7487 7487 122
## 3070 3070 117
```

9 抽样分布：1000 个样本的均值的均值与标准差

与单个样本（例如：sample1）相比，1000 个实际样本的均值的均值更加接近总体均值。

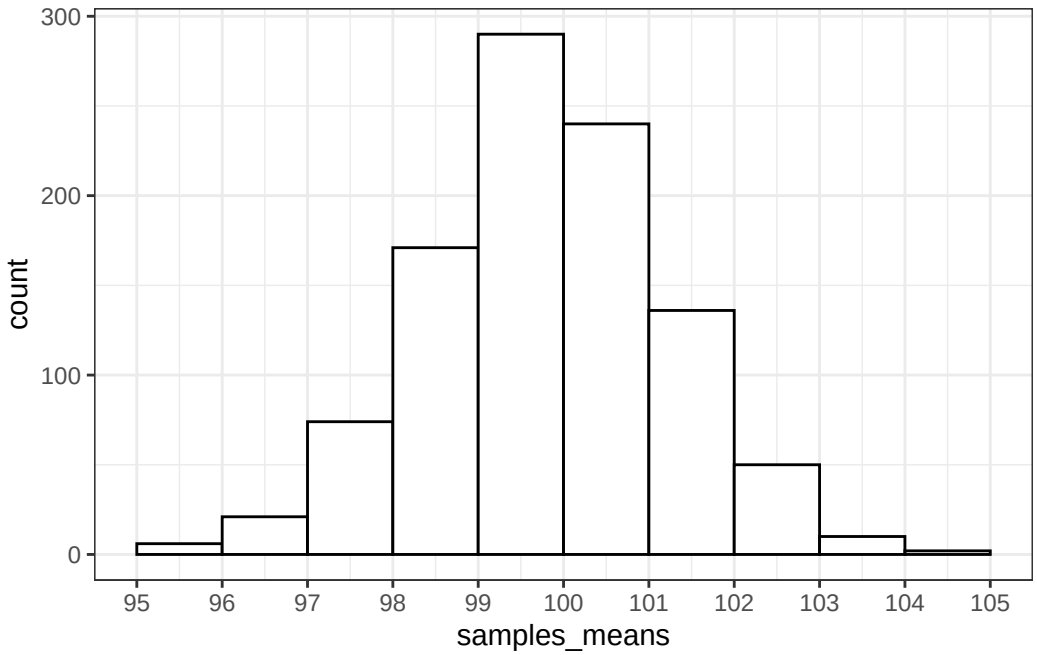
```
# 分别计算 1000 个样本的均值，一共得到 1000 个均值，存入 samples_means
samples_means <- sapply(samples, function(x) mean(x$IQ))
head(samples_means)
## [1] 101.21  98.14 100.45 100.09 100.32  98.57
range(samples_means)
## [1]  95.35 104.40
head(samples_means)
## [1] 101.21  98.14 100.45 100.09 100.32  98.57

# 1000 个实际样本的均值的均值。
mean(samples_means)
## [1] 99.8118
```

```r
# 1000 个实际样本的均值的方差。
sum((samples_means-mean(samples_means))^2)/1000
## [1] 2.023013
# 1000 个实际样本的均值的标准差。
sqrt(sum((samples_means-mean(samples_means))^2)/1000)
## [1] 1.422327
```

10 抽样分布

抽样分布是 1000 个样本的均值的分布。这个分布中的每一个数据点是一个样本中 100 名被试的 IQ 的均值，而不是一个被试的 IQ 得分，这个分布的中心是是 1000 个样本的均值的均值，这个分布的标准差是 1000 个样本的均值的标准差。

```r
# 抽样分布。即，1000 个样本的均值的分布。
ggplot(data.frame(samples_means), aes(samples_means)) +
  geom_histogram(breaks = seq(95, 105, 1),
                 fill = "white",
                 color = "black") +
  scale_x_continuous(breaks = seq(95, 105, 1)) +
  theme_bw()
```



```
#  + coord_cartesian(xlim = c(40, 160))
```

11 抽样分布与总体分布、样本分布的关系

若总体的均值 mu 与标准差 sigma 是已知的:

$$M_{sampling} = mu \tag{3}$$

$$SD_{sampling} = \frac{sigma}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

在上式中，n 是样本量。

若总体的均值 mu 与标准差 sigma 是未知的，我们可以用样本的均值与无偏标准差来估计总计的均值与标准差:

$$M_{sampling} = M_{sample} \tag{5}$$

$$s_{sampling} = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

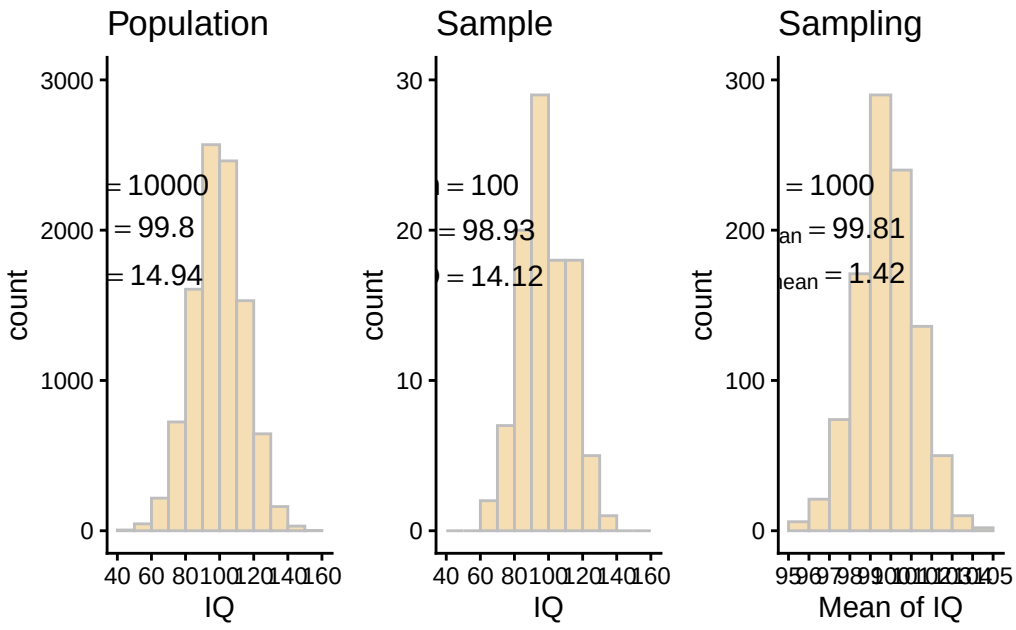
在上式中，M_{sample} 是样本的均值，s 是样本的无偏标准差。

12 三种分布的比较

比较三种分布的频数分布图:

```
library(patchwork)
plot_pop <- ggplot(population10000, aes(x = IQ)) +
  geom_histogram(breaks = seq(40, 160, 10),
                 fill = "wheat",
                 color = "grey") +
  scale_x_continuous(breaks = seq(40, 160, 20)) +
  coord_cartesian(xlim = c(40, 160), ylim = c(0, 3000)) +
  labs(title = "Population") +
  annotate(geom = "text",
           label = c("N == 10000","mu == 99.80","sigma == 14.94"),
           x = 55, y = c(2300, 2000, 1700), parse = TRUE) +
```

```
  theme_classic()
plot_sample <- ggplot(sample1, aes(IQ)) +
  geom_histogram(breaks = seq(40, 160, 10),
                 fill = "wheat",
                 color = "grey") +
  scale_x_continuous(breaks = seq(40, 160, 20)) +
  coord_cartesian(xlim = c(40, 160), ylim = c(0, 30)) +
  labs(title = "Sample") +
  annotate(geom = "text",
           label = c("n == 100","M == 98.93","SD == 14.12"),
           x = 55, y = c(23, 20, 17), parse = TRUE) +
  theme_classic()
plot_sampling <- ggplot(data.frame(samples_means), aes(samples_means)) +
  geom_histogram(breaks = seq(95, 105, 1),
                 fill = "wheat",
                 color = "grey") +
  scale_x_continuous(breaks = seq(95, 105, 1)) +
  coord_cartesian(ylim = c(0, 300)) +
  labs(title = "Sampling", x = "Mean of IQ") +
  annotate(geom = "text",
           label = c("m == 1000","M[mean] == 99.81","SD[mean] == 1.42"),
           x = 96.3, y = c(230, 200, 170), parse = TRUE) +
  theme_classic()
plot_pop + plot_sample + plot_sampling
```




```
ggsave("compare3distributions.png", width = 12, height = 3)
```

本文到此结束。